Matrizen und Matrixmultiplikation

Vortragender Stephan Weis

Informatikpulsar: Künstliche Intelligenz
Über Technik, Gehirne und Weltherrschaft

Organisiert von Simon Heitz, Anthony Garratt, und Jacob Raabe
mit Unterstützung von Milan Smalla und Christian Hausner

Evangelische Schule Berlin Zentrum

28. September 2020

Einleitung

An einem Beispiel der Geometrie diskutieren wir computerunterstütztes Problemlösen nach einem dreistufigen Schema:

1) Beschreibung eines Lösungswegs

2) Übersetzung des Lösungswegs in ein Computerprogramm

3) Berechnung der Lösung durch einen Computer

Einleitung

An einem Beispiel der Geometrie diskutieren wir computerunterstütztes Problemlösen nach einem dreistufigen Schema:

1) Beschreibung eines Lösungswegs

2) Übersetzung des Lösungswegs in ein Computerprogramm

3) Berechnung der Lösung durch einen Computer

Die künstliche Intelligenz (KI) bricht mit diesem Schema radikal, indem Computer selbständig Lösungswege finden.

Problem: Verknüpfung von Transformationen der Ebene

Die Matrix einer linearen Transformation

Die Funktion $f(x|y) = (x+y|y)$ bildet Punkte der Ebene auf Punkte der Ebene ab, zum Beispiel $f(0|0) = (0|0)$,

$$f(1|0) = (1|0) \quad \text{oder} \quad f(0|1) = (1|1).$$

Problem: Verknüpfung von Transformationen der Ebene

Die Matrix einer linearen Transformation

Die Funktion $f(x|y) = (x + y|y)$ bildet Punkte der Ebene auf Punkte der Ebene ab, zum Beispiel $f(0|0) = (0|0)$,

$$f(1|0) = (1|0) \quad \text{oder} \quad f(0|1) = (1|1).$$

Eine Matrix mit je zwei Zeilen und Spalten beschreibt f:

$$F = \left(\begin{array}{c|c} x\text{-Wert von } f(1|0) & x\text{-Wert von } f(0|1) \\ \hline y\text{-Wert von } f(1|0) & y\text{-Wert von } f(0|1) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right).$$

Problem: Verknüpfung von Transformationen der Ebene

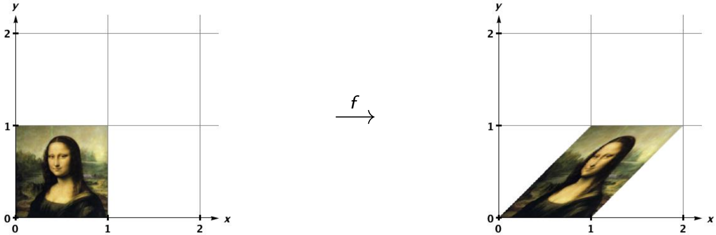
Die Matrix einer linearen Transformation

Die Funktion $f(x|y) = (x + y|y)$ bildet Punkte der Ebene auf Punkte der Ebene ab, zum Beispiel $f(0|0) = (0|0)$,

$$f(1|0) = (1|0) \quad \text{oder} \quad f(0|1) = (1|1).$$

Eine Matrix mit je zwei Zeilen und Spalten beschreibt f:

$$F = \left(\begin{array}{c|c} x\text{-Wert von } f(1|0) & x\text{-Wert von } f(0|1) \\ \hline y\text{-Wert von } f(1|0) & y\text{-Wert von } f(0|1) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right).$$



Problem: Verknüpfung von Transformationen der Ebene

Weiteres Beispiel. Die Transformation $g(x|y) = (x|\frac{1}{2}x + y)$ hat die Funktionswerte

$$g(1|0) = (1|\tfrac{1}{2}) \quad \text{und} \quad g(0|1) = (0|1),$$

Problem: Verknüpfung von Transformationen der Ebene

Weiteres Beispiel. Die Transformation $g(x|y) = (x|\frac{1}{2}x + y)$ hat die Funktionswerte

$$g(1|0) = (1|\tfrac{1}{2}) \quad \text{und} \quad g(0|1) = (0|1),$$

und die Matrix

$$G = \left(\begin{array}{c|c} x\text{-Wert von } g(1|0) & x\text{-Wert von } g(0|1) \\ \hline y\text{-Wert von } g(1|0) & y\text{-Wert von } g(0|1) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 1/2 & 1 \end{array}\right).$$

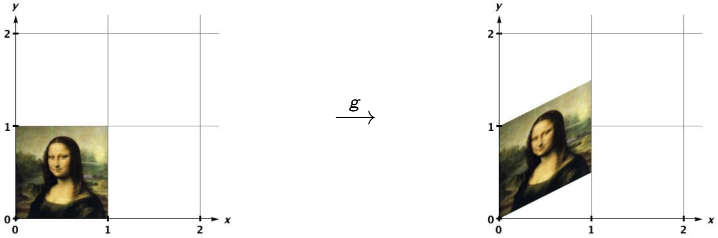
Problem: Verknüpfung von Transformationen der Ebene

Weiteres Beispiel. Die Transformation $g(x|y) = (x|\frac{1}{2}x + y)$ hat die Funktionswerte

$$g(1|0) = (1|\tfrac{1}{2}) \quad \text{und} \quad g(0|1) = (0|1),$$

und die Matrix

$$G = \left(\begin{array}{c|c} x\text{-Wert von } g(1|0) & x\text{-Wert von } g(0|1) \\ \hline y\text{-Wert von } g(1|0) & y\text{-Wert von } g(0|1) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 1/2 & 1 \end{array}\right).$$



Problem: Verknüpfung von Transformationen der Ebene

Die Verknüpfung

Die Verknüpfung von $f(x|y) = (x + y|y)$ und $g(x|y) = (x|\frac{1}{2}x + y)$ ergibt

$$h(x|y) = g(f(x|y)) = g(x + y|y) = (x + y|\tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{2}y).$$

Problem: Verknüpfung von Transformationen der Ebene

Die Verknüpfung

Die Verknüpfung von $f(x|y) = (x+y|y)$ und $g(x|y) = (x|\frac{1}{2}x+y)$ ergibt

$$h(x|y) = g(f(x|y)) = g(x+y|y) = (x+y|\tfrac{1}{2}x+\tfrac{3}{2}y).$$

Daher gilt $h(1|0) = (1|\frac{1}{2})$ und $h(0|1) = (1|\frac{3}{2})$. Die Matrix von h ist also

$$H = \left(\begin{array}{c|c} x\text{-Wert von } h(1|0) & x\text{-Wert von } h(0|1) \\ \hline y\text{-Wert von } h(1|0) & y\text{-Wert von } h(0|1) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline 1/2 & 3/2 \end{array}\right).$$

Problem: Verknüpfung von Transformationen der Ebene

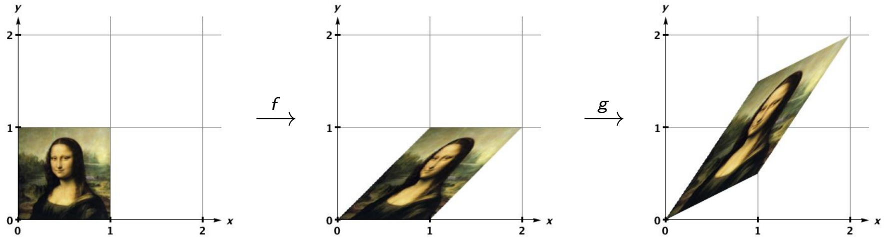
Die Verknüpfung

Die Verknüpfung von $f(x|y) = (x+y|y)$ und $g(x|y) = (x|\frac{1}{2}x + y)$ ergibt

$$h(x|y) = g(f(x|y)) = g(x+y|y) = (x+y|\tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{2}y).$$

Daher gilt $h(1|0) = (1|\frac{1}{2})$ und $h(0|1) = (1|\frac{3}{2})$. Die Matrix von h ist also

$$H = \left(\begin{array}{c|c} x\text{-Wert von } h(1|0) & x\text{-Wert von } h(0|1) \\ \hline y\text{-Wert von } h(1|0) & y\text{-Wert von } h(0|1) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline 1/2 & 3/2 \end{array}\right).$$



Der Lösungsweg: Die Matrixmultiplikation

Problem

Wie können wir die Matrix H aus den Matrizen G und F berechnen?

Der Lösungsweg: Die Matrixmultiplikation

Problem

Wie können wir die Matrix H aus den Matrizen G und F berechnen?

Die Verknüpfung entspricht der Matrixmultiplikation

Die Matrix $H = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline 1/2 & 3/2 \end{array}\right)$ der Verknüpfung $h(x|y) = g(f(x|y))$ ergibt sich durch Matrixmultiplikation aus $G = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 1/2 & 1 \end{array}\right)$ und $F = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$ wie folgt:

Der Lösungsweg: Die Matrixmultiplikation

Problem

Wie können wir die Matrix H aus den Matrizen G und F berechnen?

Die Verknüpfung entspricht der Matrixmultiplikation

Die Matrix $H = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline 1/2 & 3/2 \end{array}\right)$ der Verknüpfung $h(x|y) = g(f(x|y))$ ergibt sich durch Matrixmultiplikation aus $G = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 1/2 & 1 \end{array}\right)$ und $F = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$ wie folgt:

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \hline 1/2 & 1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{1} & 1 \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{1} \cdot \mathbf{1} + \mathbf{0} \cdot \mathbf{0} & * \\ \hline * & * \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & * \\ \hline * & * \end{array}\right)$$

Der Lösungsweg: Die Matrixmultiplikation

Problem

Wie können wir die Matrix H aus den Matrizen G und F berechnen?

Die Verknüpfung entspricht der Matrixmultiplikation

Die Matrix $H = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline 1/2 & 3/2 \end{array}\right)$ der Verknüpfung $h(x|y) = g(f(x|y))$ ergibt sich durch Matrixmultiplikation aus $G = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 1/2 & 1 \end{array}\right)$ und $F = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$ wie folgt:

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \hline 1/2 & 1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{1} \\ \hline 0 & \mathbf{1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} * & \mathbf{1} \cdot \mathbf{1} + \mathbf{0} \cdot \mathbf{1} \\ \hline * & * \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} * & 1 \\ \hline * & * \end{array}\right)$$

Der Lösungsweg: Die Matrixmultiplikation

Problem

Wie können wir die Matrix H aus den Matrizen G und F berechnen?

Die Verknüpfung entspricht der Matrixmultiplikation

Die Matrix $H = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline 1/2 & 3/2 \end{array}\right)$ der Verknüpfung $h(x|y) = g(f(x|y))$ ergibt sich durch Matrixmultiplikation aus $G = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 1/2 & 1 \end{array}\right)$ und $F = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$ wie folgt:

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline \mathbf{1/2} & \mathbf{1} \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{1} & 1 \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline \mathbf{1/2} \cdot \mathbf{1} + \mathbf{1} \cdot \mathbf{0} & * \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline 1/2 & * \end{array}\right)$$

Der Lösungsweg: Die Matrixmultiplikation

Problem

Wie können wir die Matrix H aus den Matrizen G und F berechnen?

Die Verknüpfung entspricht der Matrixmultiplikation

Die Matrix $H = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline 1/2 & 3/2 \end{array}\right)$ der Verknüpfung $h(x|y) = g(f(x|y))$ ergibt sich durch Matrixmultiplikation aus $G = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 1/2 & 1 \end{array}\right)$ und $F = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$ wie folgt:

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline \mathbf{1/2} & \mathbf{1} \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{1} \\ \hline 0 & \mathbf{1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline * & \mathbf{1/2} \cdot \mathbf{1} + \mathbf{1} \cdot \mathbf{1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline * & 3/2 \end{array}\right)$$

Der Lösungsweg: Die Matrixmultiplikation

Problem

Wie können wir die Matrix H aus den Matrizen G und F berechnen?

Die Verknüpfung entspricht der Matrixmultiplikation

Die Matrix $H = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline 1/2 & 3/2 \end{array}\right)$ der Verknüpfung $h(x|y) = g(f(x|y))$ ergibt sich durch Matrixmultiplikation aus $G = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 1/2 & 1 \end{array}\right)$ und $F = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$ wie folgt:

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline \mathbf{1/2} & \mathbf{1} \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{1} \\ \hline 0 & \mathbf{1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline * & \mathbf{1/2} \cdot \mathbf{1} + \mathbf{1} \cdot \mathbf{1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline * & 3/2 \end{array}\right)$$

Matrixmultiplikation

Der Eintrag in der i-ten Zeile und j-ten Spalte der Matrix $G \cdot F$ ist die Summe der Produkte der Zahlen in der i-ten Zeile von G und j-ten Spalte von F.

Multiplikation größerer Matrizen

Matrizen und lineare Transformationen spielen eine wichtige Rolle in Naturwissenschaft, Technik, und Statistik. Matrizen können beliebig groß sein.

$n \times m$-Matrizen

Eine $n \times m$-Matrix ist eine Anordnung von Zahlen in n Zeilen und m Spalten.

Multiplikation größerer Matrizen

Matrizen und lineare Transformationen spielen eine wichtige Rolle in Naturwissenschaft, Technik, und Statistik. Matrizen können beliebig groß sein.

$n \times m$-Matrizen

Eine $n \times m$-Matrix ist eine Anordnung von Zahlen in n Zeilen und m Spalten.

Beispiel 1. Das Produkt einer 2×3-Matrix mit einer 3×2-Matrix:

$$\left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \hline 4 & 5 & 6 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{7} & 10 \\ \hline \mathbf{8} & 11 \\ \hline \mathbf{9} & 12 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{1} \cdot \mathbf{7} + \mathbf{2} \cdot \mathbf{8} + \mathbf{3} \cdot \mathbf{9} & * \\ \hline * & * \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 50 & * \\ \hline * & * \end{array}\right)$$

Multiplikation größerer Matrizen

Matrizen und lineare Transformationen spielen eine wichtige Rolle in Naturwissenschaft, Technik, und Statistik. Matrizen können beliebig groß sein.

$n \times m$-Matrizen

Eine $n \times m$-Matrix ist eine Anordnung von Zahlen in n Zeilen und m Spalten.

Beispiel 1. Das Produkt einer 2×3-Matrix mit einer 3×2-Matrix:

$$\left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \hline 4 & 5 & 6 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} 7 & \mathbf{10} \\ \hline 8 & \mathbf{11} \\ \hline 9 & \mathbf{12} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} * & \mathbf{1} \cdot \mathbf{10} + \mathbf{2} \cdot \mathbf{11} + \mathbf{3} \cdot \mathbf{12} \\ \hline * & * \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} * & 68 \\ \hline * & * \end{array}\right)$$

Multiplikation größerer Matrizen

Matrizen und lineare Transformationen spielen eine wichtige Rolle in Naturwissenschaft, Technik, und Statistik. Matrizen können beliebig groß sein.

$n \times m$-Matrizen

Eine $n \times m$-Matrix ist eine Anordnung von Zahlen in n Zeilen und m Spalten.

Beispiel 1. Das Produkt einer 2×3-Matrix mit einer 3×2-Matrix:

$$\left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ \hline \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{7} & 10 \\ \hline \mathbf{8} & 11 \\ \hline \mathbf{9} & 12 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline \mathbf{4} \cdot \mathbf{7} + \mathbf{5} \cdot \mathbf{8} + \mathbf{6} \cdot \mathbf{9} & * \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline 122 & * \end{array}\right)$$

Multiplikation größerer Matrizen

Matrizen und lineare Transformationen spielen eine wichtige Rolle in Naturwissenschaft, Technik, und Statistik. Matrizen können beliebig groß sein.

$n \times m$-Matrizen

Eine $n \times m$-Matrix ist eine Anordnung von Zahlen in n Zeilen und m Spalten.

Beispiel 1. Das Produkt einer 2×3-Matrix mit einer 3×2-Matrix:

$$\left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ \hline \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} 7 & \mathbf{10} \\ \hline 8 & \mathbf{11} \\ \hline 9 & \mathbf{12} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline * & \mathbf{4} \cdot \mathbf{10} + \mathbf{5} \cdot \mathbf{11} + \mathbf{6} \cdot \mathbf{12} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline * & 167 \end{array}\right)$$

Multiplikation größerer Matrizen

Matrizen und lineare Transformationen spielen eine wichtige Rolle in Naturwissenschaft, Technik, und Statistik. Matrizen können beliebig groß sein.

$n \times m$-Matrizen

Eine $n \times m$-Matrix ist eine Anordnung von Zahlen in n Zeilen und m Spalten.

Beispiel 1. Das Produkt einer 2×3-Matrix mit einer 3×2-Matrix:

$$\left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ \hline \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} 7 & \mathbf{10} \\ \hline 8 & \mathbf{11} \\ \hline 9 & \mathbf{12} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline * & \mathbf{4} \cdot \mathbf{10} + \mathbf{5} \cdot \mathbf{11} + \mathbf{6} \cdot \mathbf{12} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline * & 167 \end{array}\right)$$

Bedingung

Damit wir eine $n \times m$-Matrix A mit einer $k \times \ell$-Matrix B multiplizieren können, muß $m = k$ gelten. In diesem Fall ist $A \cdot B$ eine $n \times \ell$-Matrix.

Multiplikation größerer Matrizen

Beispiel. Das Produkt einer 2×3-Matrix mit einer 2×3-Matrix ist nicht definiert,

$$\left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 6 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c|c} 7 & 8 & 9 \\ \hline 10 & 11 & 12 \end{array}\right) = \textbf{nicht definiert},$$

da die Spaltenzahl der ersten Matrix ungleich der Zeilenzahl der zweiten Matrix ist.

Multiplikation größerer Matrizen

Beispiel. Das Produkt einer 2×3-Matrix mit einer 2×3-Matrix ist nicht definiert,

$$\left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 6 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c|c} 7 & 8 & 9 \\ \hline 10 & 11 & 12 \end{array}\right) = \textbf{nicht definiert},$$

da die Spaltenzahl der ersten Matrix ungleich der Zeilenzahl der zweiten Matrix ist.

Beispiel 2. Das Produkt einer 3×2-Matrix mit einer 2×3-Matrix:

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ \hline 2 & 5 \\ \hline 3 & 6 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{7} & 8 & 9 \\ \hline \mathbf{10} & 11 & 12 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{1} \cdot \mathbf{7} + \mathbf{4} \cdot \mathbf{10} & * & * \\ \hline * & * & * \\ \hline * & * & * \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c|c} 47 & * & * \\ \hline * & * & * \\ \hline * & * & * \end{array}\right)$$

Multiplikation größerer Matrizen

Beispiel. Das Produkt einer 2×3-Matrix mit einer 2×3-Matrix ist nicht definiert,

$$\left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 6 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c|c} 7 & 8 & 9 \\ \hline 10 & 11 & 12 \end{array}\right) = \textbf{nicht definiert},$$

da die Spaltenzahl der ersten Matrix ungleich der Zeilenzahl der zweiten Matrix ist.

Beispiel 2. Das Produkt einer 3×2-Matrix mit einer 2×3-Matrix:

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ \hline 2 & 5 \\ \hline 3 & 6 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c|c} 7 & \mathbf{8} & 9 \\ \hline 10 & \mathbf{11} & 12 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c} * & \mathbf{1} \cdot \mathbf{8} + \mathbf{4} \cdot \mathbf{11} & * \\ \hline * & * & * \\ \hline * & * & * \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c|c} * & 52 & * \\ \hline * & * & * \\ \hline * & * & * \end{array}\right)$$

Multiplikation größerer Matrizen

Beispiel. Das Produkt einer 2×3-Matrix mit einer 2×3-Matrix ist nicht definiert,

$$\left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 6 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c|c} 7 & 8 & 9 \\ \hline 10 & 11 & 12 \end{array}\right) = \textbf{nicht definiert},$$

da die Spaltenzahl der ersten Matrix ungleich der Zeilenzahl der zweiten Matrix ist.

Beispiel 2. Das Produkt einer 3×2-Matrix mit einer 2×3-Matrix:

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ \hline 2 & 5 \\ \hline 3 & 6 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c|c} 7 & 8 & \mathbf{9} \\ \hline 10 & 11 & \mathbf{12} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c} * & * & \mathbf{1} \cdot \mathbf{9} + \mathbf{4} \cdot \mathbf{12} \\ \hline * & * & * \\ \hline * & * & * \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c|c} * & * & 57 \\ \hline * & * & * \\ \hline * & * & * \end{array}\right)$$

Multiplikation größerer Matrizen

Beispiel. Das Produkt einer 2×3-Matrix mit einer 2×3-Matrix ist nicht definiert,

$$\left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 6 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c|c} 7 & 8 & 9 \\ \hline 10 & 11 & 12 \end{array}\right) = \textbf{nicht definiert},$$

da die Spaltenzahl der ersten Matrix ungleich der Zeilenzahl der zweiten Matrix ist.

Beispiel 2. Das Produkt einer 3×2-Matrix mit einer 2×3-Matrix:

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 4 \\ \hline \mathbf{2} & \mathbf{5} \\ \hline 3 & 6 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{7} & 8 & 9 \\ \hline \mathbf{10} & 11 & 12 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c} * & * & * \\ \hline \mathbf{2} \cdot \mathbf{7} + \mathbf{5} \cdot \mathbf{10} & * & * \\ \hline * & * & * \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c|c} * & * & * \\ \hline 64 & * & * \\ \hline * & * & * \end{array}\right)$$

Multiplikation größerer Matrizen

Beispiel. Das Produkt einer 2×3-Matrix mit einer 2×3-Matrix ist nicht definiert,

$$\left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 6 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c|c} 7 & 8 & 9 \\ \hline 10 & 11 & 12 \end{array}\right) = \textbf{nicht definiert},$$

da die Spaltenzahl der ersten Matrix ungleich der Zeilenzahl der zweiten Matrix ist.

Beispiel 2. Das Produkt einer 3×2-Matrix mit einer 2×3-Matrix:

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 4 \\ \hline \mathbf{2} & \mathbf{5} \\ \hline 3 & 6 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c|c} 7 & \mathbf{8} & 9 \\ \hline 10 & \mathbf{11} & 12 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c} * & * & * \\ \hline * & \mathbf{2} \cdot \mathbf{8} + \mathbf{5} \cdot \mathbf{11} & * \\ \hline * & * & * \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c|c} * & * & * \\ \hline * & 71 & * \\ \hline * & * & * \end{array}\right)$$

Multiplikation größerer Matrizen

Beispiel. Das Produkt einer 2×3-Matrix mit einer 2×3-Matrix ist nicht definiert,

$$\left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 6 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c|c} 7 & 8 & 9 \\ \hline 10 & 11 & 12 \end{array}\right) = \textbf{nicht definiert},$$

da die Spaltenzahl der ersten Matrix ungleich der Zeilenzahl der zweiten Matrix ist.

Beispiel 2. Das Produkt einer 3×2-Matrix mit einer 2×3-Matrix:

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 4 \\ \hline \mathbf{2} & \mathbf{5} \\ \hline 3 & 6 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c|c} 7 & 8 & \mathbf{9} \\ \hline 10 & 11 & \mathbf{12} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c} * & * & * \\ \hline * & * & \mathbf{2} \cdot \mathbf{9} + \mathbf{5} \cdot \mathbf{12} \\ \hline * & * & * \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c|c} * & * & * \\ \hline * & * & 78 \\ \hline * & * & * \end{array}\right)$$

Multiplikation größerer Matrizen

Beispiel. Das Produkt einer 2×3-Matrix mit einer 2×3-Matrix ist nicht definiert,

$$\left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 6 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c|c} 7 & 8 & 9 \\ \hline 10 & 11 & 12 \end{array}\right) = \textbf{nicht definiert},$$

da die Spaltenzahl der ersten Matrix ungleich der Zeilenzahl der zweiten Matrix ist.

Beispiel 2. Das Produkt einer 3×2-Matrix mit einer 2×3-Matrix:

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 4 \\ \hline 2 & 5 \\ \hline \mathbf{3} & \mathbf{6} \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{7} & 8 & 9 \\ \hline \mathbf{10} & 11 & 12 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c} * & * & * \\ \hline * & * & * \\ \hline \mathbf{3} \cdot \mathbf{7} + \mathbf{6} \cdot \mathbf{10} & * & * \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c|c} * & * & * \\ \hline * & * & * \\ \hline 81 & * & * \end{array}\right)$$

Multiplikation größerer Matrizen

Beispiel. Das Produkt einer 2×3-Matrix mit einer 2×3-Matrix ist nicht definiert,

$$\left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 6 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c|c} 7 & 8 & 9 \\ \hline 10 & 11 & 12 \end{array}\right) = \textbf{nicht definiert},$$

da die Spaltenzahl der ersten Matrix ungleich der Zeilenzahl der zweiten Matrix ist.

Beispiel 2. Das Produkt einer 3×2-Matrix mit einer 2×3-Matrix:

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 4 \\ \hline 2 & 5 \\ \hline \mathbf{3} & \mathbf{6} \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c|c} 7 & \mathbf{8} & 9 \\ \hline 10 & \mathbf{11} & 12 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c} * & * & * \\ \hline * & * & * \\ \hline * & \mathbf{3} \cdot \mathbf{8} + \mathbf{6} \cdot \mathbf{11} & * \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c|c} * & * & * \\ \hline * & * & * \\ \hline * & 90 & * \end{array}\right)$$

Multiplikation größerer Matrizen

Beispiel. Das Produkt einer 2×3-Matrix mit einer 2×3-Matrix ist nicht definiert,

$$\left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 6 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c|c} 7 & 8 & 9 \\ \hline 10 & 11 & 12 \end{array}\right) = \textbf{nicht definiert},$$

da die Spaltenzahl der ersten Matrix ungleich der Zeilenzahl der zweiten Matrix ist.

Beispiel 2. Das Produkt einer 3×2-Matrix mit einer 2×3-Matrix:

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 4 \\ \hline 2 & 5 \\ \hline \mathbf{3} & \mathbf{6} \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c|c} 7 & 8 & \mathbf{9} \\ \hline 10 & 11 & \mathbf{12} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c} * & * & * \\ \hline * & * & * \\ \hline * & * & \mathbf{3} \cdot \mathbf{9} + \mathbf{6} \cdot \mathbf{12} \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c|c} * & * & * \\ \hline * & * & * \\ \hline * & * & 99 \end{array}\right)$$

Computerberechnung mit `Python`

Beispiel 1.

$$\left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 6 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} 7 & 10 \\ \hline 8 & 11 \\ \hline 9 & 12 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 50 & 68 \\ \hline 122 & 167 \end{array}\right)$$

Computerberechnung mit Python

Beispiel 1.

$$\left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 6 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} 7 & 10 \\ \hline 8 & 11 \\ \hline 9 & 12 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 50 & 68 \\ \hline 122 & 167 \end{array}\right)$$

Eingabe

```
import numpy
A = numpy.array([[1,2,3],[4,5,6]])
B = numpy.array([[7,10],[8,11],[9,12]])
numpy.dot(A,B)
```

Computerberechnung mit Python

Beispiel 1.

$$\left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 6 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} 7 & 10 \\ \hline 8 & 11 \\ \hline 9 & 12 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 50 & 68 \\ \hline 122 & 167 \end{array}\right)$$

Eingabe

```
import numpy
A = numpy.array([[1,2,3],[4,5,6]])
B = numpy.array([[7,10],[8,11],[9,12]])
numpy.dot(A,B)
```

Ausgabe:

```
array([[ 50,  68],
       [122, 167]])
```

Computerberechnung mit Python

Beispiel 2.

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 4 \\ \hline 2 & 5 \\ \hline 3 & 6 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c|c} 7 & 8 & 9 \\ \hline 10 & 11 & 12 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c} 47 & 52 & 57 \\ \hline 64 & 71 & 78 \\ \hline 81 & 90 & 99 \end{array}\right)$$

Computerberechnung mit Python

Beispiel 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 47 & 52 & 57 \\ 64 & 71 & 78 \\ 81 & 90 & 99 \end{pmatrix}$$

Eingabe

```
import numpy
A = numpy.array([[1,4],[2,5],[3,6]])
B = numpy.array([[7,8,9],[10,11,12]])
numpy.dot(A,B)
```

Computerberechnung mit Python

Beispiel 2.

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 4 \\ \hline 2 & 5 \\ \hline 3 & 6 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c|c} 7 & 8 & 9 \\ \hline 10 & 11 & 12 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c} 47 & 52 & 57 \\ \hline 64 & 71 & 78 \\ \hline 81 & 90 & 99 \end{array}\right)$$

Eingabe

```
import numpy
A = numpy.array([[1,4],[2,5],[3,6]])
B = numpy.array([[7,8,9],[10,11,12]])
numpy.dot(A,B)
```

Ausgabe:

```
array([[47, 52, 57],
       [64, 71, 78],
       [81, 90, 99]])
```

Zusammenfassung

Wir haben am Beispiel der Matrixmultiplikation gesehen, dass Computer helfen können bekannte Lösungswege umzusetzen, indem sie einem Computerprogramm folgen.

Zusammenfassung

Wir haben am Beispiel der Matrixmultiplikation gesehen, dass Computer helfen können bekannte Lösungswege umzusetzen, indem sie einem Computerprogramm folgen.

In den folgenden Vorträgen lernen wir Probleme kennen, die im Rahmen der künstlichen Intelligenz gelöst werden können, auch wenn keine Lösungswege bekannt sind.

- Computerspieler im chinesischen Brettspiel Go
- Spracherkennung
- Sprachübersetzung
- visuelle Erkennung (z.B. Handschrift)
- Autopilot
- etc.

Danke für die Aufmerksamkeit!

Dieser Vortrag basiert teilweise auf Vorarbeiten von Anthony Garratt. Die Folien wurden mit LaTeX (beamer class, bclogo- und TikZ-Paket) erzeugt. Die Graphiken wurden mit `Wolfram Mathematica` erstellt.